Black-Scholes Equation

ブラック・ショールズ方程式

知的財産仲裁センター知的財産価値評価人候補者

弁理士　堀　城之

序

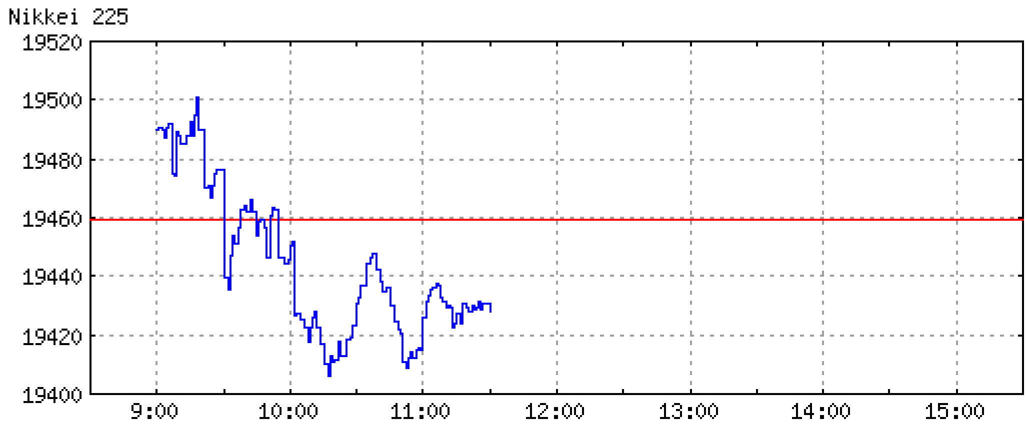
$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2+\frac{\partial V}{\partial S_t}rS - rV=0$$

　これが、ブラック・ショールズ方程式であり、フィッシャー・ブラックとマイロン・ショールズにより発明された偏微分方程式である。オプション取引（ヨーロピアンオプション）における理論価格の決定に用いられるものとして広く普及した。この功績により 1997 年のノーベル経済学賞の受賞対象になった。現在では、ブラック・ショールズ方程式が、知的財産価値評価（ｐｌ－ｘ社のTRRU（TM)等)、パテントポートフォリオ、知的財産価値デューデリジェンスなどにも適用されている。また、｢知財 過度な節税防止　海外移転後、高収益で再課税」という記事も発表され、（２０１７年３月１０日　日本経済新聞電子版)、当該知財評価にも用いられる。これらの手法においてはブラック・ショールズ方程式は基本の基であり且つ大変重要な式であり、知的財産価値評価にも用いられる。しかし、ブラック・ショールズ方程式に関する数学的アプローチが書かれた書籍を見たことが無く、確率・統計などになじみが無い方には数学的に難しい。また経済用語などは我々弁理士にはとっつきにくい。そこで、可能な限り分かり易くブラック・ショールズ方程式を纏めてみた。

　以下、ブラック・ショールズ方程式の導出・解法を行う。

１．Winner 過程

確率統計でよく用いられるものであるが、難しいことはなくブラウン運動であり、よっぱらいが歩いた過程や株価である。



Winner 過程では、確率過程 $W_{(ti)}$の変化量 $W_{(ti)}-W_{(t(i-1))}$は、正規分布 $N_{(0,\ \sigma=(tk-t(k-1)))}$に従う。

$\Delta X=a\Delta t+b\Delta W$……………………式(1)

を Winner 過程の一般化という。

なぜ一般化と言うかというと、筆者が思うに、マクロ的には株価等はある直線に従って増減すると共に、ミクロ的には Winner 過程で増減しているからだと解釈している。また、Δとしているのは、微分不可能だから。

以上が、ブラック・ショールズ方程式の前提の前提。

２．伊藤のレンマ

元京都大学教授の伊藤清氏が考案したレンマであり、ブラック・ショールズ方程式の前提である。伊藤のレンマを導くための前提が伊藤過程である。まずは一般的な解法を記載する。

（１）　伊藤過程とは、上記一般化した Winner 過程である式(1)を以下のように変形したものをいう。以下、文系の読者にも分かり易いように丁寧に記載する。

$dX_t = a(t, X_t)dt + b\,(t, X_t)dB_t$ ……………式(2)　$W \equiv B_t$

伊藤過程では、前提として、微分可能であり、２階のテーラー展開が可能なので、

$f(t, Xt) \equiv f$

として多変数テーラー展開すると、

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {X_t}^2}(dX_t)^2 \ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}[a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {X_t}^2}[a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t]^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}[a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {X_t}^2}\{b(t, X_t)\}^2 d{B_t}^2 \ + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

三次以降及び二乗微小項を排除すると、

$$= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}[a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial {X_t}^2}\{b(t, X_t)\}^2 d{B_t}^2 \cdots\cdots\cdots \text{式}(3)$$

ここで、$d{B_t}^2$は、上記のごとく確率過程であるから、その期待値は

$$E[d{B_t}^2]$$

Winner 過程は、上記の如く正規分布$N_{(0,t_t)}$に従うから(期待値０)

$$E[d{B_t}^2] = E[d{B_t}^2] - (E[dB_t])^2 \cdots\cdots\cdots \text{式}(4)$$

分散の公式から

$$E[d{B_t}^2] - (E[dB_t])^2 = V[dB_t] \cdots\cdots\cdots \text{式}(5)$$

正規分布$N_{(0,t_t)}$から分散は dt なので、式(4)及び式(5)から

$$E[d{B_t}^2] = E[d{B_t}^2] - (E[dB_t])^2 = V[dB_t] = dt \cdots\cdots\cdots \text{式}(6)$$

$E[d{B_t}^2]$は正の期待値であり、大数の法則※を鑑みると

$$d{B_t}^2 = dt \quad \cdots\cdots\cdots \text{式}(7)$$

と書いても構わない。

式(7)を式(3)にいれると、

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} [a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dB_t] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {X_t}^2} \{b(t, X_t)\}^2 dt \cdots\cdots\cdots \text{式}(8)$$

これが伊藤のレンマである。

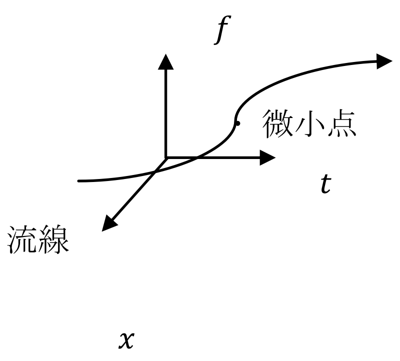
※大数の法則とは、Winner 過程を前提に記載すると、試行を繰り返した結果が正規分布 $N(0, {}_{\sigma}=(tk- t(k-1)))$に従うこととなるということ。例えば、試行結果が正規分布になるように算数の同一テストを沢山行ったということではなく、日本人全員でテストしたら結果が正規分布に従ったということである。換言すれば良いテストでしたということ。実際には、全世界で正規分布となるテストを日本で行うと、識字率に教養の高さが比例することが真であるとして日本人は右正規分布に偏ったえぼし岩のような結果になるかもしれない。

（２）流体力学的アプローチ

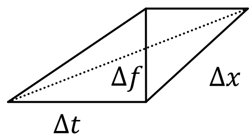
検証する意味で、筆者の専門の一つである流体でも導出できた（筆者が調べた限りにおいて、世界で筆者だけの方法)。

伊藤過程は、微分可能なので流線と等価であると仮定することができるとする。

流線を、以下の如く時間微分、場所微分が可能な関数で表す。



流線における微小点を拡大すると以下になる。



この図は、微小時間Δt経過すると、X 方向にΔx進み、その結果、fはΔfだけ増加することを示す。

この図を式で表すと、

$\Delta f \approx f_x \Delta_x + f_x \Delta_t$

2 次までテーラー展開すると

$\Delta f \approx f_x \Delta_x + f_x \Delta_t + \frac{f_{xx}}{2}(\Delta_x)^2 + f_{xt}\Delta_x \Delta_t + \frac{f_{tt}}{2}(\Delta_t)^2$

ここで、下付き添え字は当該文字での微分を示す。

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}\,, \qquad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{tt} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

微小項を無視すると、

$\Delta f \approx f_x \Delta_x + f_x \Delta_t + \frac{f_{xx}}{2}(\Delta_x)^2 \qquad \because \Delta_x \gg \Delta_t$

伊藤過程を示す式(1), (2)から

$\Delta f \approx f_x(a\Delta t + b\Delta B) + f_x \Delta_t + \frac{f_{xx}}{2}(a\Delta t + b\Delta B)^2$

$\Delta f \approx f_x(a\Delta t + b\Delta B) + f_x \Delta_t + \frac{f_{xx}}{2}((a\Delta t)^2 + 2ab\Delta t\Delta B + (b\Delta B)^2)$

微小項を無視すると、

$\Delta f \approx f_x(a\Delta t + b\Delta B) + f_x \Delta_t + b^2\frac{f_{xx}}{2}(\Delta B)^2$

大数の法則から

$\Delta f \approx f_x(a\Delta t + b\Delta B) + f_x \Delta_t + b^2\frac{f_{xx}}{2}\Delta_t \qquad \dots\dots\dots\dots$ 式（9)

式（9）は式（８）と数学的等価であり、是すなわち伊藤のレンマである。流体においても砕波、滝等に水が落ちた場合の水滴の動きに適用できるかもしれない。

３．ブラック・ショールズモデル

株価の確率過程を *S*、時刻 t における株価をS_tとすると、

微小時間経過後の収益は、

$dS_t = S_{t+k} - S_t$

単位時間当たりの儲けは、

$\frac{dS_t}{S_t} = \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}$ $\dots\dots\dots$式(10)

株価を、１．で述べたように比例部分と変動部分（確率過程）とで表すと、

$\mu dt + \sigma dB_t$ $\dots\dots\dots$式(11)

式（11）を式（10）に代入すると

$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$

$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ $\dots\dots\dots$式（12）

これをブラック・ショールズモデルという。

μ：ドリフト　　σ：ボラティリティ

ボラティリティは、確率過程における株価変動率であり、大きければ値動きが激しく、リスクも大きいということになる。

４．ブラック・ショールズ方程式

今、オプション（売買権）を

$f \equiv V(t, S_t)$

として伊藤のレンマ（式（8)）を適用すると、

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S_t}[\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2 dt$$

微分項で整理すると

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S_t}\sigma S_t dB_t \dots\dots\dots \text{式（13）}$$

式（12）から単位時間当たりの価値変化率は、

$$\frac{\partial V}{\partial t} = d(V - \Delta S) \dots\dots\dots \text{式（14）}$$

式(14)右辺に式(13),(12)を代入すると、

$$\left[\left(\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\mu S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2\right)dt+\frac{\partial V}{\partial S_t}\sigma S_t dB_t\right)\right]-\Delta(\mu S_t dt+\sigma S_t dB_t)$$

$$=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\mu S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2-\Delta\mu S_t dt\right)dt+(\frac{\partial V}{\partial S_t}$$

$$-\Delta)\sigma S_t dB_t \ldots\ldots\ldots \text{式（15）}$$

$$\Delta=\frac{\partial V}{\partial S_t}$$

だから、

$$d(V-\Delta S)=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2\right)dt \ldots\ldots\ldots \text{式}(16)$$

利子率を r とすると（儲かるためには r > 0）、

$$d(V-\Delta S)=r(V-\Delta S)dt$$

だから、この式の左辺に式(16)を入れると、

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2\right)dt=r(V-\Delta S)dt$$

両辺を時間積分して整理すると

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 {S_t}^2+\frac{\partial V}{\partial S_t}rS_t-rV=0 \ldots\ldots\ldots \text{式}(17)$$

これがブラック・ショールズ方程式である。

５．ブラック・ショールズ方程式の解法

ブラック・ショールズ方程式は、*wikipedia* 等にも記載されているように熱伝導方程式に変換できる。以下簡便に記載する。

$x=logS_t$

と仮定すると、

$$\frac{\partial}{\partial S_t}=\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2}{\partial {S_t}^2}=-\frac{1}{{S_t}^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{{S_t}^2}\frac{\partial^2}{x^2} \ldots\ldots\ldots \text{式}(18)$$

$\tau'=T-t$

T： ポートフォリオ満了日　t：初期値０から経過時間

とすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \tau'} \dots\dots\dots 式(19)$$

式（１８)、(１９）を式（１７）に入れると

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau'} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\sigma^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial V}{\partial S_t} rS_t - rV = 0 \dots\dots\dots 式(20)$$

Vの解を$e^{ax+b\tau'}U$と仮定すると、

$$\frac{\partial V}{\partial \tau'} = be^{ax+b\tau'}U + e^{ax+b\tau'}\frac{\partial U}{\partial \tau'} \dots\dots\dots 式(21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = ae^{ax+b\tau'}U + e^{ax+b\tau'}\frac{\partial U}{\partial x} \dots\dots\dots 式(22)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \left(a^2 e^{ax+b\tau'}U + ae^{ax+b\tau'}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \left(ae^{ax+b\tau'}\frac{\partial U}{\partial x} + e^{ax+b\tau'}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) \dots\dots\dots 式(23)$$

式（２１）～（２３）を式（２０）に代入すると、

$$-\left(be^{ax+b\tau'}U + e^{ax+b\tau'}\frac{\partial U}{\partial \tau'}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left[\left(a^2 e^{ax+b\tau'}U + ae^{ax+b\tau'}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \left(ae^{ax+b\tau'}\frac{\partial U}{\partial x} + e^{ax+b\tau'}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\right] + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(ae^{ax+b\tau'}U + e^{ax+b\tau'}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + re^{ax+b\tau'}U = 0$$

両辺を $e^{ax+b\tau'}$ で除して、微分階数で整理すると、

$$-\frac{\partial U}{\partial \tau'} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{2}a^2\sigma^2 + \frac{1}{2}a^2\sigma^2\right]\frac{\partial U}{\partial x} + \left[-b + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)a + \frac{1}{2}a^2\sigma^2 + r\right] U = 0 \quad \dots\dots\dots 式(24)$$

熱伝導方程式にするには、第 3 項及び第 4 項の[　]の中をゼロにする必要があるから連立方程式をとして a,b を計算しそれを代入するれば良い。

すると、式（２４）は

$$-\frac{\partial U}{\partial \tau'} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots 式(25)$$

となる。

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2\tau'$$

と置くと、式（25）は、

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \dots\dots\dots 式(26)$$

となる。因みに左辺を 2 階にすれば振動方程式である。いずれも、変数分離で解くことができる。熱伝導方程式の解は、熱力学の書物に出ているのでそれらを参照されたい。

ブラック・ショールズモデルは、ヨーロピアン・コールオプション（売買権）の価格を決定するものなので、ヨーロピアンコールオプションの形で解を記載すると以下になる。。

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} \mathrm{K} N(d_2) \dots\dots\dots 式(27)$$

ここで、

N：標準正規累積分布関数

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{\mathrm{K}}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{\mathrm{K}}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

S_t：株価　K：行使価格　σ：ボラティリティ　e：2.7182　r：利子率

T:　ポートフォリオ満了日　t：初期値 0 からの経過時間

さらに使いやすい汎用ブラック・ショールズモデルと呼ばれている形式も記載する。

$$C(S_t, t) = e^{-qTt} S_t N(d_1) - e^{-rTt} K N(d_2) \dots\dots\dots 式(28)$$

q：原資産利回り　Tt：期間（1 年なら”1”、半年なら”0.5”）

計算するには、各係数を widows の関数電卓で計算して式（２８）に入れれば良いだけである。エクセルで計算式を作成し、各係数を入力するようにすれば簡単に計算できる。Nについては、エクセルの normsdist 関数で求めることができる。

計算例

金融大学（http://www.findai.com/）から引用許可を得た計算例を以下に記載する。

S：原資産価格（株価）　　----- 100 円

K：行使価格　　----- 99 円

σ：ボラティリティ ----- 10％　ボラティリティが唯一の未知数です。

Tt：オプションの有効期間　----- 0.5（半年）

r：安全利子率　　----- ３％

$$d_1 = \frac{Ln(\frac{s}{k}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\ t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$= \frac{Ln(\frac{100}{99}) + (0.03 + \frac{1}{2} \times 0.1^2) \times 0.5}{0.1 \times \sqrt{0.5}}$$

$$= 0.3896$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$$= 0.3896 - 0.1 \times \sqrt{0.5}$$

$$= 0.3189$$

$N(d_1) = N(0.3896) = 0.6516$

$N(d_2) = N(0.3189) = 0.6251$

$e^{-qTt} = e^{-0.03 \text{ x } 0.5} = 0.9851$

$$C = \mathrm{S}N(d_1) - \mathrm{e}^{-r\,\mathrm{t}}\mathrm{K}N(d_2)$$

$$= 100 \times 0.6516 - 0.9851 \times 99 \times 0.6251$$

$$= 4.1953$$

これがコール価格である。

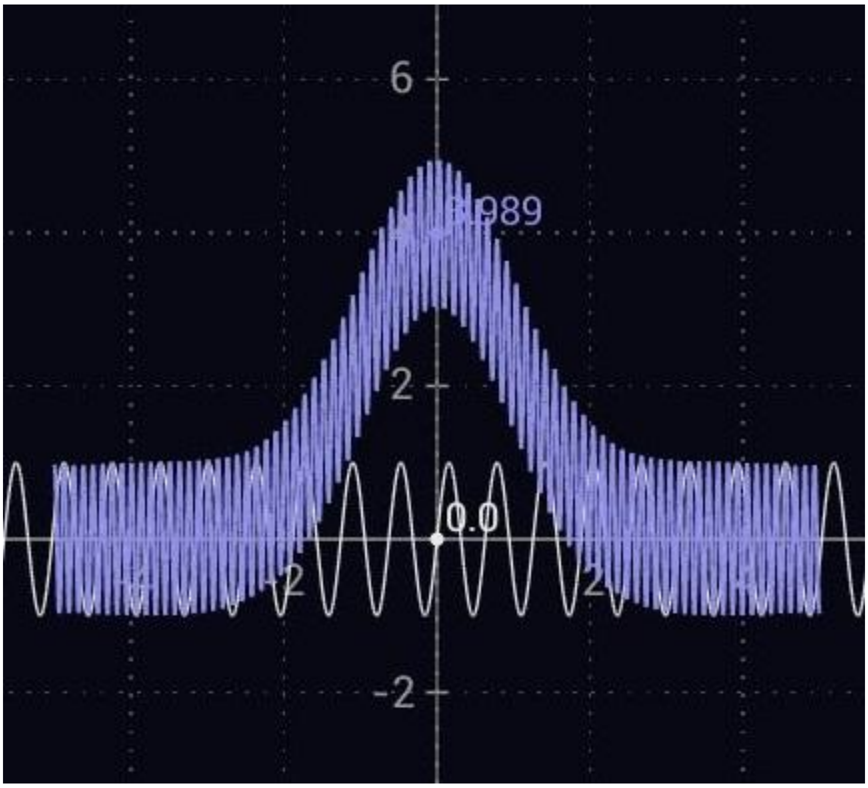
６．　纏め

ブラック・ショールズ方程式は、ナビエストークス方程式のようなエレガントさはない。また、伊藤のレンマが無ければ絶対にできなかった。数学的には伊藤のレンマの方が格段に興味をそそられる。

ただ、伊藤のレンマは上記の如く $N(0,\ \sigma=(tk - t(k-1)))$ の正規分布に従うことを前提にしているので（当該正規分布に従わなければ数学的に解けない）、大数の法則で記載したえぼし岩の如く試行結果は正規分布に従わない場合があり、故に、リーマンショックが生まれたのであろう。

もしかしたら、正規分布の代わりに以下の確率密度関数で表される分布を基礎とするとボラティリティの発散も解消でき第２リーマンショックの発生も防止できるかもしれない。

$$D = \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)+\ \xi sin\omega t\right)$$



終わり