

SOLITON

会員 堀 城之

序

不思議な波が存在する。半永久的に形を変えず伝搬する波である。これをソリトンという。由来は、孤立波を意味する solitary wave と、粒子を意味する -on とから作られた造語である。日本からソリトン波でサーフィンをするとアメリカまでパドリングせずに到着する。さらには、ソリトン同士が衝突しても波形、速度は変わらない。忍者のように互いにすり抜ける。チリ地震による津波や、アマゾンを逆流するポロロッカもソリトンかもしれない。ソリトンは工学的にも応用され、係る発明も少なくない（IPDLで“ソリトン”を全文検索すると1059件（2013/07/30現在））。通信技術に応用する光ソリトン伝送技術も発明されている。以下、ソリトンについて説明する。

1. 経緯

物理現象としての孤立波は、1834年に [J・スコット・ラッセル](#) によって初めて報告された。[J・スコット・ラッセル](#) はエジンバラ郊外の運河で馬にひかれていたボートが急にとまったとき、船首に水の高まりができ、そこから孤立波が生じ、ほとんど波形を変えずに伝播していくのを偶然目撃した。造船技術者であったスコットラッセルは、水槽実験を行い報告した。

コルトヴェーグ (D. J. Korteweg) とドフリース (G. de Vries) とにより孤立波を表す方程式が求められた。これを K d V 方程式という。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

その後、多数のソリトン方程式が導かれた。代表的なものを以下に掲げる。

[変形 K d V 方程式](#)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

[KP 方程式](#)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

サインゴルドン方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0$$

非線形シュレディンガー方程式

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa |u|^2 u = 0$$

ブジネ方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

ベンジャミン-オノ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\pi} \text{pv.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{x - y} dy = 0$$

戸田格子方程式

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = e^{-(u_n - u_{n-1})} - e^{-(u_{n+1} - u_n)}$$

1981 年の[佐藤理論](#)の完成により、ソリトン方程式は無限に存在することが示された。

from Wikipedia

2. ソリトン方程式の導出

上述の如くソリトン方程式は無限にあるが、基端となる K d V 方程式を導出する。まず導出に係る定理から説明する。

(1) ベルヌーイの定理

$$\frac{1}{2} \text{grad } q^2 + \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{g}z = \text{const} \quad (2.1.1)$$

これをベルヌーイの定理という。古典流体力学におけるエネルギー保存則を表す。ジェットコースターと同じと考えればよい。左辺第 1 項は運動エネルギー、第 2 項は圧力エネルギー、第 3 項は位置エネルギー

ギーである。土木工学、機械工学では、それぞれ速度水頭、圧力水頭、位置水頭ともいう。

例えば、電車のホームでは、

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{\rho}p = \text{const}$$

となる。この式から、ホームを電車が通過する場合、ベルヌーイの定理から通過する電車の周りに負圧（大気圧を正）が発生することが導かれる。通過する電車に近寄るのはやめましょう。

3次元における速度 q の2乗は、

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad (2.1.2)$$

各方向で偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} q^2 &= 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} + 2w \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} q^2 &= 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} + 2w \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} q^2 &= 2u \frac{\partial u}{\partial z} + 2v \frac{\partial v}{\partial z} + 2w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

それぞれ変形すると、

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} q^2 &= v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} q^2 &= v \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} q^2 &= v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

各左辺を $\equiv \omega_x$ 、 ω_y 、 ω_z （意味は無い）とし、さらに各式をオイラーの運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

に代入すると（導出は、パテント 2013.9 知恵の話 2 4 ナビエ・ストークス方程式参照）、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \omega_x = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} q^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \omega_y = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} q^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \omega_z = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} q^2 \quad (2.1.5)$$

=

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \boldsymbol{\omega} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } \mathbf{P} - \frac{1}{2} \text{grad } q^2 \quad (2.1.6)$$

定常であれば左辺第1項は一定。(2.1.4)における各右辺第2項は渦を表していて、後述の2(2)で渦無し流れを扱うので左辺第2項は0となり、代わりに同(2)で示す速度ポテンシャル

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

が存在する。右辺第1項を \mathbf{gz} とおけば、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } q^2 + \frac{1}{\rho} \text{grad } \mathbf{P} + \mathbf{gz} = \text{const} \quad (2.1.7)$$

定常一様非圧縮では、 $\mathbf{P} = p$ であるから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } q^2 + \frac{p}{\rho} + \mathbf{gz} = \text{const} \quad (2.1.8)$$

となる。式(2.1.1)に対して、式(2.1.8)を一般化されたベルヌーイの定理とも言われる。

以上でベルヌーイの定理が導かれた。

(2) 複素速度ポテンシャル

二次元渦無し流れをポテンシャル流れといい、複素平面 ($Z = x + iy$) で表される。

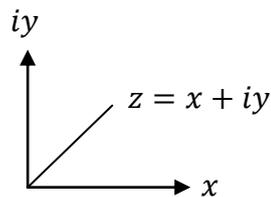


Fig. 1

なぜ、複素平面で表すかということ、筆者が思うに実数と虚数とが各方向の流速を表し、実数と虚数とを分けて考えることが出来、オイラーの公式 $e^{i\omega\theta} = \cos\omega\theta + i\sin\omega\theta$ も使えて便利(計算が楽)だから。

速度ポテンシャル Φ と流れ関数 Ψ とを用いると、

$$W(z) = \Phi(z) + i\Psi(z) \quad (2.2.1)$$

と記載することが出来る。これを複素速度ポテンシャルという。

速度ポテンシャル Φ と流れ関数 Ψ とも所定の微分をすれば x 、 y 方向の速度がでる。

(3) コーシーリーマンの定理

式 (2.2.1) を x で偏微分すると、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{W(z + \Delta x) - W(z)}{\Delta x} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.3.1)$$

y で偏微分すると、

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{W(z + \Delta y) - W(z)}{\Delta y} \right) = -i \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.3.2)$$

正則であるためには、虚実が同一でなければならないから、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.3.3)$$

これをコーシーリーマンの定理という。

各左辺は u, v であるから

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v \quad (2.3.4)$$

となる。

式 (2.3.4) の左式を y で偏微分し、右式を x で偏微分して差をとれば、

$$\Delta \Phi = 0 \quad (2.3.5)$$

$$\Delta \Psi = 0 \quad (2.3.5)$$

なお、3次元ポテンシャル流れにおける波の基礎方程式も速度ポテンシャル Φ を用いて表せば同一である。

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3.6)$$

(4) K d V 方程式の導出

複素速度ポテンシャルは (2.2.1) から

$$\Pi(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$$

流れは時間の関数であるから

$$\Pi(z, t) = \Phi(z, t) + i\Psi(z, t) \quad (2.4.1)$$

Fig. 1 から $z = x + iy$ であるから、

$$\Pi(x + iy, t) = \Phi(x + iy, t) + i\Psi(x + iy, t) \quad (2.4.2)$$

微少時間 t 経過後の $W(z)$ の値をマクローリン展開※すると、

$$\Phi\Pi(z) \in \Pi(z)$$

$$\begin{aligned} &= \Phi + \frac{1}{1!}\Phi^{(1)}(iy)^1 + \frac{1}{2!}\Phi^{(2)}(iy)^2 + \frac{1}{3!}\Phi^{(3)}(iy)^3 + \frac{1}{4!}\Phi^{(4)}(iy)^4 + \dots \\ &= \Phi + i\Phi^{(1)}y - \frac{1}{2!}\Phi^{(2)}y^2 - i\frac{1}{3!}\Phi^{(3)}y^3 + \frac{1}{4!}\Phi^{(4)}y^4 + \dots \quad (2.4.3) \end{aligned}$$

$$\Phi^{(n)} \equiv \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n}$$

$$\Psi\Pi(z) \in \Pi(z)$$

$$\begin{aligned} &= \Psi + \frac{1}{1!}\Psi^{(1)}(iy)^1 + \frac{1}{2!}\Psi^{(2)}(iy)^2 + \frac{1}{3!}\Psi^{(3)}(iy)^3 + \frac{1}{4!}\Psi^{(4)}(iy)^4 + \dots \\ &= \Psi + i\Psi^{(1)}y - \frac{1}{2!}\Psi^{(2)}y^2 - i\frac{1}{3!}\Psi^{(3)}y^3 + \frac{1}{4!}\Psi^{(4)}y^4 + \dots \quad (2.4.4) \end{aligned}$$

$$\Psi^{(n)} \equiv \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n}$$

$$\Re\Pi(z) = \Phi - \frac{1}{2!}\Phi^{(2)}y^2 + \frac{1}{4!}\Phi^{(4)}y^4 + \dots \quad (2.4.5)$$

\Re : real part function

$$\Im\Pi(z) = \Psi^{(1)}y - \frac{1}{3!}\Psi^{(3)}y^3 + \dots \quad (2.4.6)$$

\Im : imaginarily part function

上記はストレートな方法。以下楽な方法。

$\Pi(z) \equiv \Pi(z)$ として同様にマクローリン展開すると、

$$\Pi(z)$$

$$\begin{aligned} &= \Pi + \frac{1}{1!}\Pi^{(1)}(iy)^1 + \frac{1}{2!}\Pi^{(2)}(iy)^2 + \frac{1}{3!}\Pi^{(3)}(iy)^3 + \frac{1}{4!}\Pi^{(4)}(iy)^4 + \dots \\ &= \Pi + i\Pi^{(1)}y - \frac{1}{2!}\Pi^{(2)}y^2 - i\frac{1}{3!}\Pi^{(3)}y^3 + \frac{1}{4!}\Pi^{(4)}y^4 + \dots \quad (2.4.7) \end{aligned}$$

$$\Re\Pi(z) = \Phi = \Pi - \frac{1}{2!}\Pi^{(2)}y^2 + \frac{1}{4!}\Pi^{(4)}y^4 + \dots \quad (2.4.8)$$

$$\Im\Pi(z) = \Psi = \Pi^{(1)}y - \frac{1}{3!}\Pi^{(3)}y^3 + \dots \quad (2.4.9)$$

因って、同じ。

複素速度ポテンシャルで表すと楽ちんの意味が分かったでしょ！

※マクローリン展開

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

from Wikipedia

同ナビエ・ストークス方程式では、多変数テーラー展開の公式を導出した。テーラー展開はある関数上の任意の点 (x, y, z) から少し離れた点を予想する式であったが、マクローリン展開は $(0,0,0)$ から少し離れた点を予想する。

高次項を無視して第2項までとすると、

$$\Phi(x + iy, t) = \Pi - \frac{1}{2!} \Pi^{(2)} y^2 \quad (2.4.10)$$

$$\Psi(x + iy, t) = \Pi^{(1)} y - \frac{1}{3!} \Pi^{(3)} y^3 \quad (2.4.11)$$

コーシーリーマンの定理(2.3.3)から

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Pi^{(1)} - \frac{1}{2!} \Pi^{(3)} y^2 \quad (2.4.12)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\Pi^{(2)} y + \frac{1}{3!} \Pi^{(4)} y^3 \quad (2.4.13)$$

一般化されたベルヌーイの方程式(2.1.8)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{q}^2 + \frac{1}{\rho} \text{grad } \mathbf{p} + \mathbf{g} \mathbf{z} = \text{const}$$

を2次元ポテンシャル流れに直すと

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} + gy = 0 \quad (2.4.14)$$

$$y = h + \eta \quad (2.4.15) \quad y: \text{自由面} \quad h: \text{水深} \quad \eta: \text{波高}$$

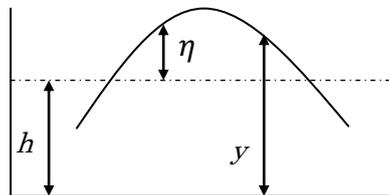


Fig. 2

式(2.4.14)に式(2.4.10), (2.4.12), (2.4.13)を代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\Pi - \frac{1}{2!} \Pi^{(2)} y^2 \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left[\Pi^{(1)} - \frac{1}{2!} \Pi^{(3)} y^2 \right]^2 + \left[-\Pi^{(2)} y + \frac{1}{3!} \Pi^{(4)} y^3 \right]^2 \right\} + g y = 0 \quad (2.4.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\Pi - \frac{1}{2!} \Pi^{(2)} y^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left[\Pi^{(1)2} - \Pi^{(1)} \Pi^{(3)} y^2 + \frac{1}{4} \Pi^{(3)2} y^4 \right] \right. \\ & \left. + \left[\Pi^{(2)2} y^2 - \frac{1}{3} \Pi^{(2)} \Pi^{(4)} y^4 + \frac{1}{36} \Pi y^6 \right] \right\} + g y \\ & = 0 \quad (2.4.17) \end{aligned}$$

高次項を無視し、式 (2.4.15) を考慮すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\Pi - \frac{1}{2!} \Pi^{(2)} (h + \eta)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left[\Pi^{(1)2} - \Pi^{(1)} \Pi^{(3)} (h + \eta)^2 \right] + \left[\Pi^{(2)2} (h + \eta)^2 \right] \right\} \\ & + g (h + \eta) = 0 \quad (2.4.18) \end{aligned}$$

D'ici, Est mathématique,

$$\begin{aligned} \varsigma & \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial x} \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left[\Pi - \frac{1}{2!} \varsigma^{(1)} (h + \eta)^2 \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left[\varsigma^2 - \varsigma \varsigma (h + \eta)^2 \right] + \left[\varsigma^{(1)2} (h + \eta)^2 \right] \right\} \\ & + g (h + \eta) = 0 \quad (2.4.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\Pi - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varsigma_x (h + \eta)^2 \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left[\varsigma^2 - \varsigma \varsigma_{xx} (h + \eta)^2 \right] + \left[\varsigma_x^2 (h + \eta)^2 \right] \right\} \\ & + g (h + \eta) = 0 \quad (2.4.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\Pi - \frac{1}{2} \varsigma_{xt} (h + \eta)^2 - \varsigma_x \eta_t (h + \eta) \right] + \frac{1}{2} \left[\varsigma^2 - \varsigma \varsigma_{xx} (h + \eta)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\varsigma_x^2 (h + \eta)^2 \right] + g (h + \eta) = 0 \quad (2.4.21) \end{aligned}$$

ς_{xx} : 被添え字を添え字で添え字の数だけ偏微分

x で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
& \left[\zeta_t - \frac{1}{2} \zeta_{xxt} (h + \eta)^2 - \zeta_{xt} (h + \eta) \eta_x - \zeta_{xx} \eta_t (h + \eta) - \zeta_x \eta_{tx} (h + \eta) \right. \\
& \quad \left. - \zeta_x \eta_t \eta_x \right] \\
& + \frac{1}{2} [2\zeta \zeta_x - \zeta_x \zeta_{xx} (h + \eta)^2 - 2\zeta \zeta_{xx} (h + \eta) \eta_x \\
& \quad - \zeta \zeta_{xxx} (h + \eta)^2] \\
& + \frac{1}{2} [2\zeta_x^2 (h + \eta)^2 \eta_x + 2(h + \eta)^2 \zeta_x \zeta_{xx}] + g\eta_x \\
& = 0 \quad (2.4.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \zeta_t - \frac{1}{2} \zeta_{xxt} (h + \eta)^2 - \zeta_{xt} (h + \eta) \eta_x - \zeta_{xx} \eta_t (h + \eta) - \zeta_x \eta_{tx} (h + \eta) \\
& \quad - \zeta_x \eta_t \eta_x + \zeta \zeta_x - \frac{1}{2} \zeta_x \zeta_{xx} (h + \eta)^2 - \zeta \zeta_{xx} (h + \eta) \eta_x \\
& \quad - \frac{1}{2} \zeta \zeta_{xxx} (h + \eta)^2 + \zeta_x^2 (h + \eta)^2 \eta_x + (h + \eta)^2 \zeta_x \zeta_{xx} + g\eta_x \\
& = 0 \quad (2.4.23)
\end{aligned}$$

式(2.4.23)を浅水波（ソリトンは浅水波）として近似する。∵浅水波は線形化できず、近似しないと解けない。

式(2.4.23)のうち線形項は、

$$\zeta_t, g\eta_x。$$

∵前者は複素速度ポテンシャル関数だから、後者は無次元だから。

また、最も低次の非線形項は、

$$\zeta \zeta_x。$$

∵式(2.4.23) の場合は1次だから。

また、最も低次の微分項は、

$$-\frac{1}{2} \zeta_{xxt} h^2$$

∵ 無次元だから。

これらで式(2.4.23)を書き直すと、

$$\zeta_t + g\eta_x + \zeta \zeta_x - \frac{1}{2} \zeta_{xxt} h^2 = 0 \quad (2.4.24)$$

波の自由表面では、

$$\eta_t + u\eta_x = v \quad (2.4.25)$$

この式に、式(2.4.12)及び式(2.4.13)を代入すると

$$\eta_t + (\Pi^{(1)} - \frac{1}{2!}\Pi^{(3)}y^2)\eta_x = -\Pi^{(2)}y + \frac{1}{3!}\Pi^{(4)}y^3 \quad (2.4.26)$$

$$\eta_t + (\varsigma - \frac{1}{2!}\varsigma_{xx}(h+\eta)^2)\eta_x = -\varsigma_x(h+\eta) + \frac{1}{3!}\varsigma_{xxx}(h+\eta)^3 \quad (2.4.27)$$

$$\eta_t + \varsigma\eta_x - \frac{1}{2!}\varsigma_{xx}(h+\eta)^2\eta_x + \varsigma_x(h+\eta) - \frac{1}{3!}\varsigma_{xxx}(h+\eta)^3 = 0 \quad (2.4.28)$$

式(2.4.28)を、式(2.4.23)と同様に近似すると、

$$\eta_t + \varsigma_x h + \varsigma\eta_x + \eta\varsigma_x - \frac{1}{6}\varsigma_{xxx}h^3 = 0 \quad (2.4.29)$$

式(2.4.24)及び式(2.4.29)に既知式、

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{2/3}t, \quad \eta = \varepsilon\alpha \\ \varepsilon = \varepsilon(hk)^2, \quad c_0 = gh$$

を代入すると、

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\tau} - c_0\frac{\partial\beta}{\partial\xi} + \frac{c_0}{h}\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} + \frac{c_0h^2}{2}\frac{\partial^3\alpha}{\partial\xi^3} = 0 \quad (2.4.30)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\tau} - c_0\frac{\partial\beta}{\partial\xi} + 2\frac{c_0}{h}\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} - \frac{c_0h^2}{6}\frac{\partial^3\alpha}{\partial\xi^3} = 0 \quad (2.4.31)$$

両式から

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\tau} + \frac{3c_0}{2h}\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} + \frac{c_0h^2}{6}\frac{\partial^3\alpha}{\partial\xi^3} = 0 \quad (2.4.32)$$

$$\varepsilon = 1 \text{ とすると}$$

$$\tau = t, \quad \eta = \alpha$$

となるから、

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} + \frac{3c_0}{2h}\eta\frac{\partial\eta}{\partial\xi} + \frac{c_0h^2}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial\xi^3} = 0 \quad (2.4.33)$$

$$t = 6\frac{c_0}{h}t, \quad \xi = hx, \quad \eta = \frac{2}{3}hu$$

の時、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.4.34)$$

添え字に直すと、

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.4.35)$$

以上により K d V 方程式を導出できた。

3. ソリトン方程式 (K d V方程式) の解

K d V方程式は、見ての通り非線形偏微分方程式である。解けたら100万ドルもらえるナビエ・ストークス方程式と同じである。しかし、K d V方程式は解ける。

この解は、非常に面白い。孤立波が1つの場合、2つの場合、…、…、…、N個の場合が存在する。これらを1ソリトン解、2ソリトン解、…、…、…、Nソリトン解という。

(1) 1ソリトン解

$$z \equiv x - ct \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}$$

これらを式(2.4.35)に代入すると、

$$\begin{aligned} S_{zzz} + 6SS_z - cS_z &= 0 \\ S_{zzz} &= (c - 6S)S_z \end{aligned}$$

両辺を z で部分積分すると

$$\begin{aligned} S_{zz} &= \int (c - 6S)S_z dz \\ &= (c - 6S)S - \int (c - 6S)'S dz \\ &= cS - 6S^2 - (-3S^2) \\ S_{zz} &= cS - 3S^2 + A1 \quad (2.4.36) \end{aligned}$$

式(2.4.36)の両辺に S_z を掛けて部分積分すると (境界条件から $A1=0$)、

$$\int S_{zz}S_z dz = \int (cS - 3S^2)S_z dz$$

左辺は、

$$\int S_{zz}S_z dz = \frac{1}{2}(S_z)^2$$

右辺は、

$$\begin{aligned} \int (cS - 3S^2)S_z dz &= (cS - 3S^2)S - \int (cS - 3S^2)'S dz \\ &= (cS^2 - 3S^3) - \int (cS - 6S^2) dz \\ &= \frac{1}{2}cS^2 - 3S^3 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(S_z)^2 = \frac{1}{2}cS^2 - 3S^3$$

$$\Rightarrow (S_z)^2 = cS^2 - 2S^3 + A2 \quad (2.4.37)$$

境界条件から $A_2=0$ を考慮しつつ、式(2.4.37)を変形し積分すると、

$$(S_z)^2 = (c - 2S)S^2$$

$$u = \int \frac{1}{S\sqrt{c - 2S}} dz + A_3$$

右辺を積分し、

$$c = 4k^2$$

とすると、

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(1 + e^{2\beta}) \quad \beta = k(x - ct + \delta)$$

と記載することも出来る。

(2) 2ソリトン解

式(2.4.37)と同じ形式で表すと、

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(1 + \alpha_1 e^{2\beta_1} + \alpha_2 e^{2\beta_2} + \alpha_3 e^{2\beta_3})$$

$\alpha_{1,2,3}, \beta_{1,2,3}$: 定数

(3) nソリトン解

計算が複雑なので結果だけ記載する。

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \det A$$

$\det A$: $n * n$ の正方行列

(4) その他

広田の直接法という解法がある。この方法でも解くことが出来る。

以下、簡潔に記載する。

$$D_x^m D_t^n f \cdot g = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n f(x, t) g(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t}$$

$$D_x f \cdot g = f_x g - f g_x$$

$$D_x^2 f \cdot g = f_{xx} g - 2f_x g_x + f g_{xx}$$

$$D_x^3 f \cdot g = f_{xxx} g - 3f_{xx} g_x + 3f_x g_{xx} - f g_{xxx}$$

$$D_x^4 f \cdot g = f_{xxxx} g - 4f_{xxx} g_x + 6f_{xx} g_{xx} - 4f_x g_{xxx} + f g_{xxxx}$$

$$D_x D_t f \cdot g = f_{tx} g - f_t g_x - f_x g_t + f g_{tx}$$

from Wikipedia

$|x'=x$ は、微分後に $x'=x$ とするとそれに続く式（その下の式）が成立することを意味する。これが広田微分であり、 D_t, D_x^3 を広田の D 演算子という。上式（広田微分）を見るとややこしそうだが、その下式をみれば分かるように合成関数の微分の如き結果となる。

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f$$

を

$$\text{式 (2.4.35)} \quad u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

に代入し、広田微分を用いて表すと、

$$D_x (D_t + D_x^3) f \cdot f = 0 \quad (2.4.37)$$

を得る。これを双線形という。実は式(2.4.37)を得るのも結構しんどい。導出までは煩雑な計算が必要である。

f を冪数展開して

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + \dots + f^{(n)} \quad (2.4.38)$$

式(2.4.38)を式(2.4.37)に入れて

1 ソリトン解なら、 $f = f^{(0)} + f^{(1)}$

2 ソリトン解なら $f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)}$

n ソリトン解なら

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + \dots + f^{(n)},$$

恒等式を作り、満足する条件を求めれば解が得られる。

このように広田の直説法は、ソリトン解を簡便に求められる。

と書物等に書かれている…、…、…。

4. ソリトンの応用

ソリトンの、最も有用且つ実現可能なものの一つが、序で述べた光ソリトン伝送技術である。光ソリトン伝送技術は、ベル研究所で日本人の長谷川晃博士（大阪大学名誉教授）が発明した技術である。今から15年前に、18000万km（約地球4500周）を歪みなく伝送することに成功した。また、10Gb/sの符号誤り率は100万km伝搬後と入射時とで殆ど劣化しないことが確認されている。通信のためのソリトンとも言える側面を有する。絶望的地球を救う技術かもしれない。

- 参考書：日野幹雄著 「流体力学」 株式会社朝倉書店
岩佐義朗著 「水理学」 朝倉土木工学講座
十河 清著 「非線形物理学 カオス・ソリトン・パターン」 裳華房
池田正宏著 「光ファイバ通信」 株式会社コロナ社